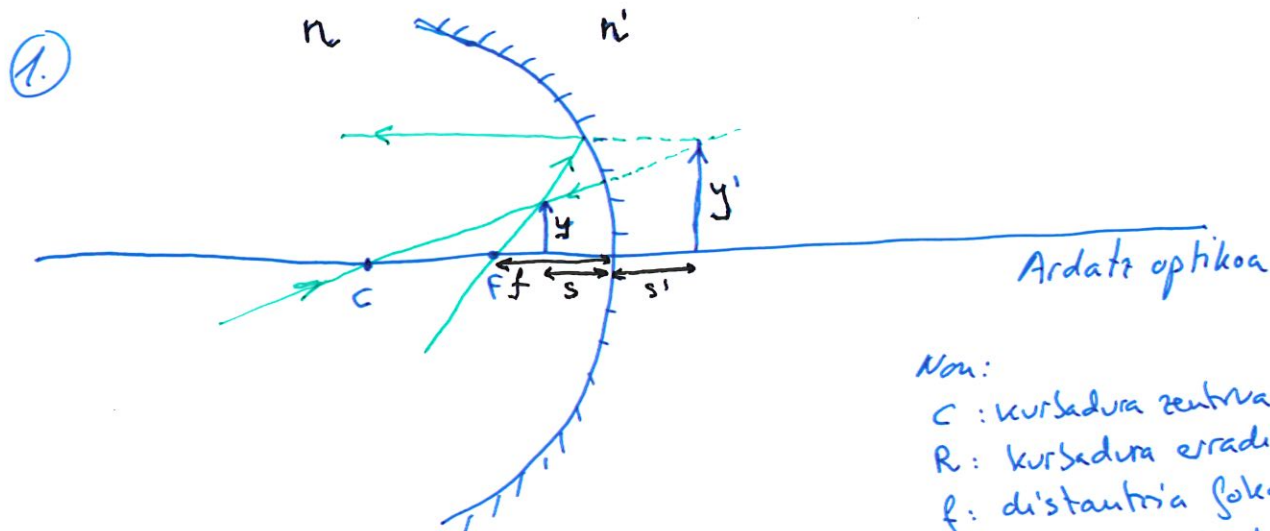


2025-6-C1.- Ispilu ahur baten aurrean, 50 cm-ko foku-distantziakoa bera, eta 25 cm-ra, 1cm-ko altuerako objektu bat dago, ispiluaren ardatzarekiko perpendikular.

1. Irudikatu izpien eskema eta kokatu ispiluak bueltatuko duen irudia.
2. Kalkulatu irudiaren posizioa eta tamaina



Non:

- C : kurbadura zentrua
- R : kurbadura erradiora
- f : distantzia fokale
- s : objektu distantzia
- s' : irudi distantzia
- y : objektuaren altuera
- y' : irudiaren altuera

$$f = 50\text{cm}$$

$$R = 2 \cdot f = 100\text{cm}$$

$$s = -25\text{cm}$$

$$y = 1\text{cm}$$

- ② Zeinven DIN ikarriaren konstante hartuz eta dioptrio esferikoaren oinarriko ekuazioetik abiatuko gara.

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n' - n}{R}$$

Ispiluen kasuan $n' = -n$ \rightarrow $\frac{-n}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{-n - n}{R} \rightarrow \boxed{\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{2}{R}}$

Bertan s bakanduz eta datuak sartuz

$$\rightarrow \frac{1}{s'} = \frac{2}{R} - \frac{1}{s} \rightarrow \boxed{s' = \frac{1}{\frac{2}{R} - \frac{1}{s}} = \frac{1}{\frac{2}{-100} - \frac{1}{-25}} = 50\text{cm}}$$

Grafikoan ikusten den bezala irudia izpien bidezkoak (bertan da, beraz irudia birkala da, irudi distantzia positiboarekin ikusten dena ere (50cm))

Tamaina eta orientazioa handipenaren bidez kalkulatuko dugu (M_L)

$$M_L = -\frac{s'}{s} = \frac{y'}{y} \rightarrow \boxed{y' = -\frac{s'}{s} \cdot y = -\frac{50}{-25} \cdot 1 = 2\text{cm}}$$

y' positiboa den bezala irudia zutik dago eta objektuaren tamaina bikoitza da.

BERAZ: Birtuala, zutik eta tamaina bikoitza da.

- Leiar konbergente baten aurrean objektu bat kokatuko dugu, sorraraziko duen irudiaren ezaugarriak honako hauek izateko: irudi birtuala, zuzena eta objektuaren tamaina baino hiru aldiz handiagoa; zer distantziatara kokatu behar da objektua leiarretik? Leiarren foku-distantzia 0,50 m da, eta, objektuaren tamaina, 1 cm.
- Egin izpien diagrama, eta identifikatu, bertan, leiarren elementu nagusiak, objektua eta eraturako irudia, bai eta zer posiziotan kokatu behar diren ere.
- Demagun objektu bera kokatu dela, orain, leiarren fokua dagoen puntutik leiarren foku-distantziaren distantzia berdinerara:
 - zer ezaugarri ditu eratu den irudi berriak?

Ariketan zehinven DIN hitzarmena kontutan hartuko da.

a) Lente konbergentea izanik $f' > 0 \rightarrow f' = 0.5 \text{ m}$.

Bertaldekik $y' = 3y$ $\begin{cases} y = 1 \text{ cm} \\ y' = 3 \text{ cm} \end{cases}$

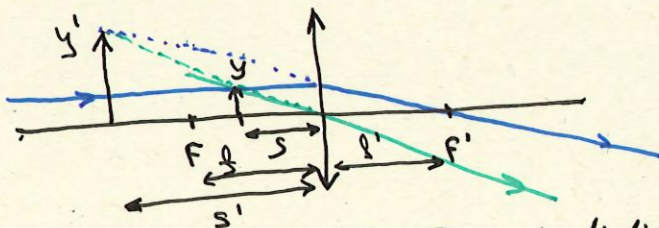
Also emendioxen formula jar: $\frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} \rightarrow 3 = \frac{s'}{s} \rightarrow s' = 3s$

Orain oinarrituko ekuazioak:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} \rightarrow \frac{1}{3s} - \frac{1}{s} = \frac{1}{0.5} \rightarrow \frac{1}{s} \left(\frac{1}{3} - 1 \right) = \frac{1}{0.5}$$

$\rightarrow \boxed{s = \left(\frac{1}{3} - 1 \right) \cdot 0.5 = -0.33 \text{ m}}$ Lentehik erretortara eta erpinia eta fokuen artean dago.

b)



f' : irudi distantzia fokala

$$\boxed{f' = 0.5 \text{ m}}$$

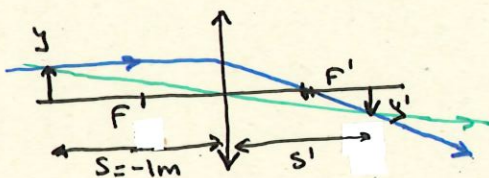
f : objektu distantzia fokala

$$\boxed{f = -0.5 \text{ m}}$$

Irudi distantzia: $\boxed{s' = 3 \cdot s = -0.99 \text{ m}}$

Objektu distantzia: $\boxed{s = -0.33 \text{ m}}$
 Objektuaren tamaina $\boxed{y = 1 \text{ cm}}$; Irudiaren tamaina $\boxed{y' = 3 \cdot y = 3 \text{ cm}}$
 Irudia sirtuala da, zuzena eta objektua baino handiagoa.

c)



$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} \rightarrow \boxed{s' = \frac{1}{\frac{1}{f'} + \frac{1}{s}} = \frac{1}{\frac{1}{0.5} + \frac{1}{-1}} = 1 \text{ m}}$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} \rightarrow \boxed{y' = \frac{s'}{s} y = \frac{1}{-1} \cdot 1 = -1 \text{ cm}}$$

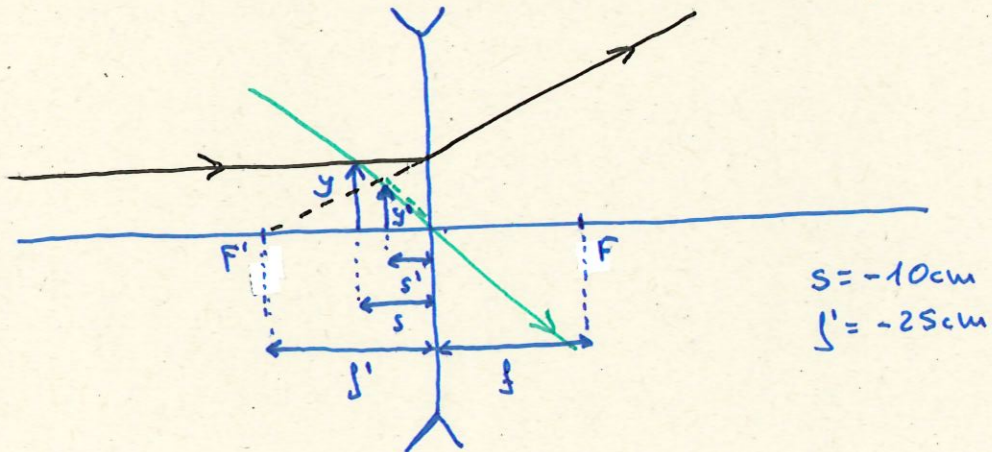
Irudia erreala, alderantzizkoa, objektuaren tamainakoa eta erpinetik eskumatara metro batetara.

2022-7-A3

7 cm-ko altuerako objektu bat lente mehe dibergente baten ezker aldean jarri da, lentetik 10 cm-ra. Lentearen distantzia fokala 25 cm da.

- Marratzu izpi-diagrama nagusia, irudien eraketa erakutsiz.
- Zehaztu irudiaren posizioa, orientazioa, tamaina eta izaera.

a)



b) Posizioa kalkulatu teko, lente mehe formularekin eta zehaztu DIN hitarmenak.

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} \rightarrow \frac{1}{s'} = \frac{1}{s} + \frac{1}{f'} \rightarrow \boxed{s' = \frac{1}{\frac{1}{s} + \frac{1}{f'}} = \frac{1}{\frac{1}{-10} + \frac{1}{-25}} = -7.14 \text{ cm}}$$

Tamaina kalkulatu teko:

$$\frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} \rightarrow \boxed{y' = \frac{s'}{s} \cdot y = \frac{-7.14}{-10} \cdot 7 = 5 \text{ cm}}$$

Irudiaren eraberririk:

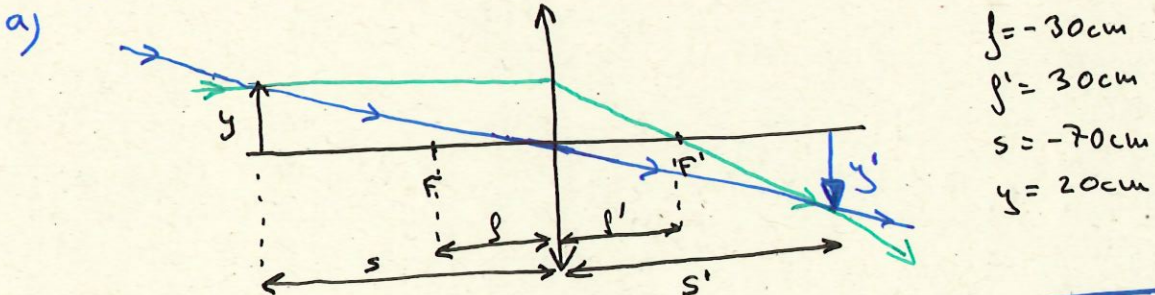
- Irudia lentetik eskerretara: -7.14 cm-ko posizioan.
- Irudiaren tamaina 5 cm. Objektua baino txikiagoa.
- Tamaina positiboa izanik eta irudiaren eraketa ikusten dener, irudia zutik agertzen da, objektuaren orientazio berrinagat.
- Irudia izpieen buruenen bitartez osatu dener (grafikan be ikusten dener) birtuala da.

A3.- Leiar konbergente bat dugu, zeinaren foku-distantzia 30 cm baita.

Egin dagokion diagrama, eta zehaztu zer ezaugarri (erreala edo birtuala, zuzena edo azpikoz gora, handiagoa edo txikiagoa), posizio eta tamaina izango zuen leiarrek sortutako irudiak bi kasu hauetan:

- a) 20 cm-ko objektu bat leiarretik 70 cm-ra dagoenean.
- b) 20 cm-ko objektu bat leiarretik 20 cm-ra dagoenean.

Ariketa zehar zeinven DIN hitarmena errespetatuko da.

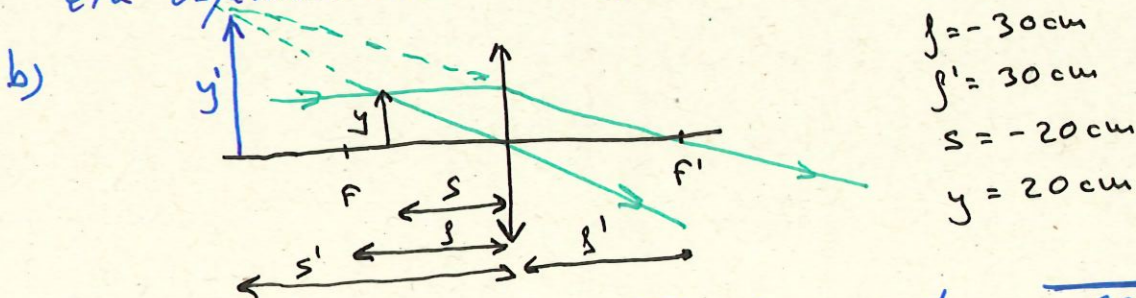


Posizioa kalkulatzeko: $\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'}$ → $\boxed{s' = \frac{1}{\frac{1}{s} + \frac{1}{f'}} = \frac{1}{\frac{1}{-70} + \frac{1}{30}} = 52.5 \text{ cm}}$

Tamaina albo-emendiatzen formularen bitartez: $\frac{y}{y'} = \frac{s}{s'}$ → $y' = \frac{s'y}{s}$ →

→ $\boxed{y' = \frac{52.5 \cdot 20}{-70} = -15 \text{ cm}}$

Besta irudia erreal da (izpiak topatzen dira), buruz beherakoa da, eta objektua baino txikiagoa.



Posizioa (aurrekoan berola): $\boxed{s' = \frac{1}{\frac{1}{s} + \frac{1}{f'}} = \frac{1}{\frac{1}{-20} + \frac{1}{30}} = -60 \text{ cm}}$

Eta tamaina: $\boxed{y' = \frac{s'y}{s} = \frac{-60 \cdot 20}{-20} = 60 \text{ cm}}$

Besta irudia birtuala da (izpien luzapenak topatzen dira), zuzena da eta objektua baino handiagoa.

2020-7-A4

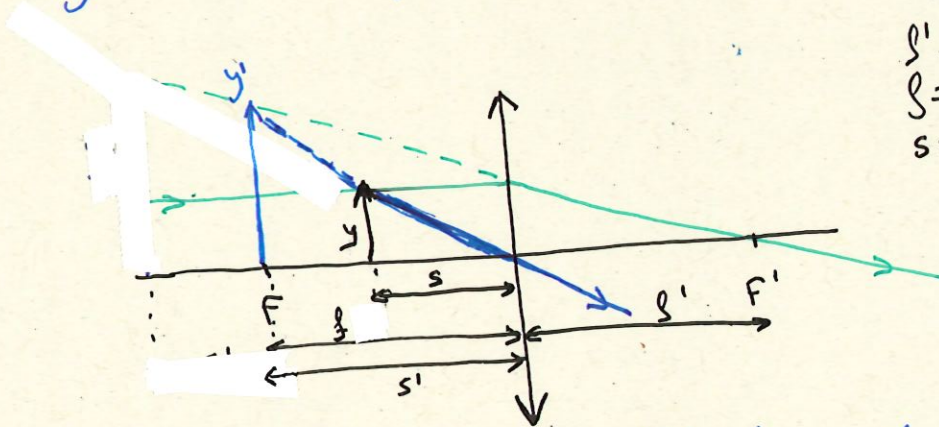
A4.- Laborategi batean, argazki-kamara batek duen leiarraren ezaugarriak aztertzen ari dira. Dakigunez, hau da leiarraren distantzia fokalaren balio absolutua: $|f| = 8 \text{ cm}$. Objektu bat leiarretik 40 mm-ra kokatzen bada, objektuaren tamaina bikoitza duen irudi zuzen bat lortzen da.

- Zehaztu leierra ea konbergentea ala dibergentea den.
- Kalkulatu irudiaren posizioa, eta adierazi, izpi-diagrama egoki bat eginez, objektuaren eta irudiaren posizioa eta tamaina.
- Zer irudi mota lortzen da: erreala ala birtuala?

Berriketan zehar leute meheen formulak eta zintzen OIN hitarmena aplikatu:

a) Irudia objektua baino handiagoa dena eta leiar konbergentea da, dibergenteetan trikiago ikusten da beti.

b)



$$\begin{aligned} f' &= 8 \text{ cm} \\ f &= -8 \text{ cm} \\ s &= -4 \text{ cm} \end{aligned}$$

Posizioa kalkulatzeko: $\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} \rightarrow \boxed{s' = \frac{1}{\frac{1}{s} + \frac{1}{f'}} = \frac{1}{-\frac{1}{4} + \frac{1}{8}} = -8 \text{ cm}}$

Tamaina zehatzeko: $\boxed{y' = \frac{s'}{s} y = \frac{-8}{-4} y = 2y}$

Beraz: - Irudi birtuala (izpien berapenak alkatzen dira.

- Irudia zuzena da.

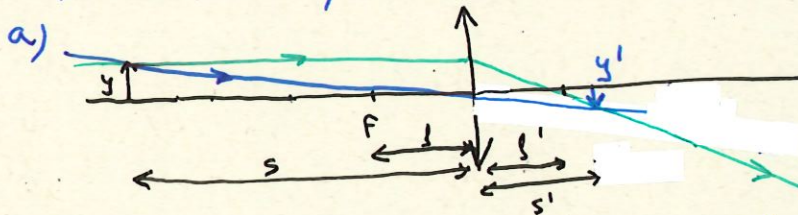
- Irudiak objektuaren tamaina bikoitza dauka.

c) Izpien berapenak ez lortzen dena, irudia birtuala da.

P2.- Objektu bati behatzeko, leiar konbergente bat erabili da; horretarako, objektua leiarraren zentrotik $4f$ -ko distantziara kokatu da (f = leiarraren foku-distantzia).

- Egin ezazu izpi-diagrama objektuaren irudia nola sortzen den adierazteko.
- Zer ezaugarri ditu irudiak? Adierazi ea objektua baino handiagoa edo txikiagoa den, erreal aedo birtuala den, eta zuzen edo alderantziz dagoen.
- Errapika itzazu aurreko bi atalak, objektua leiarraren zentrotik $f/2$ -ko distantziara kokatzen dela jakinik.

Ariketan leute meken formulak eta zeinuen DIN hitzarmena aplikatzen dira.



$$\begin{aligned} f &= -f \\ s' &= f \\ s &= 4f \end{aligned}$$

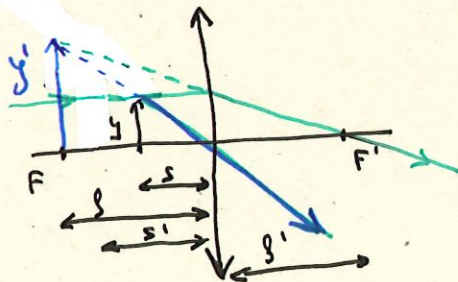
Posizioa kalkulatzeko: $\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f}$ $\rightarrow s' = \frac{1}{\frac{1}{s} + \frac{1}{f}} = \frac{1}{\frac{1}{4f} + \frac{1}{f}} = \frac{4}{5}f$

Handipena: $y' = s' \cdot y / s = \frac{4}{5}f \cdot y / (4f) = \frac{y}{5}$

b) Goian lortutakoaren araber:

- IRUDIA - Erreal da izpiak elkarren dibatuko.
 - Buzuz beharkoa da.
 - Objektua baino txikiagoa

c)



$$\begin{aligned} f &= -f \\ s &= -f/2 \\ s' &= f \end{aligned}$$

Lehen erroala: $s' = \frac{1}{\frac{1}{s} + \frac{1}{f}} = \frac{1}{-\frac{2}{f} + \frac{1}{f}} = -f$

Handipena: $y' = s' \cdot y / s = -fy / (-f/2) = 2y$

- IRUDIA: - Birtuala, izpien berapenak elkarren dibatuko.
 - Zuzena
 - Objektua baino handiagoa.

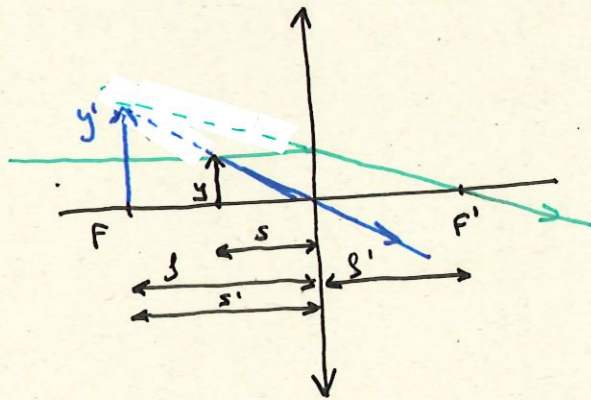
2017-6-B-P1

P1.- Laborategi batean sakelako telefono baten kamarak duen lentearen ezaugarriak aztertzen ari dira. Dakigunez, hau da leiarraren distantzia fokalaren balio absolutua: $|f| = 6 \text{ cm}$. Objektu bat leiaretik 30 mm-ra kokatzen bada, objektuaren tamaina bikoitza duen irudi zuzen bat lortzen da.

- Zehaztu ea leierra konbergentea edo dibergentea den.
- Kalkulatu irudiaren posizioa, eta adierazi, izpi-diagrama egoki bat eginez, objektuaren eta irudiaren posizioa eta tamaina.
- Zer irudi mota lortzen da: erreala ala birtuala?

a) Irudia objektua baino handiagoa da, beraz lente konbergentea da, lente dibergenteetan irudiak txikiagoak eta birtualak diralako.

b)



$$f = -6 \text{ cm}$$

$$s = -3 \text{ cm}$$

$$s' = 6 \text{ cm}$$

Lente meheen formulak eta zeinven DIN hitarmena horren gainean kalkuluetan aplikatuko dira.

Posizioa kalkulatzeko: $\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f} \rightarrow \boxed{s' = \frac{1}{\frac{1}{s} + \frac{1}{f}} = \frac{1}{-\frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = -6 \text{ cm}}$

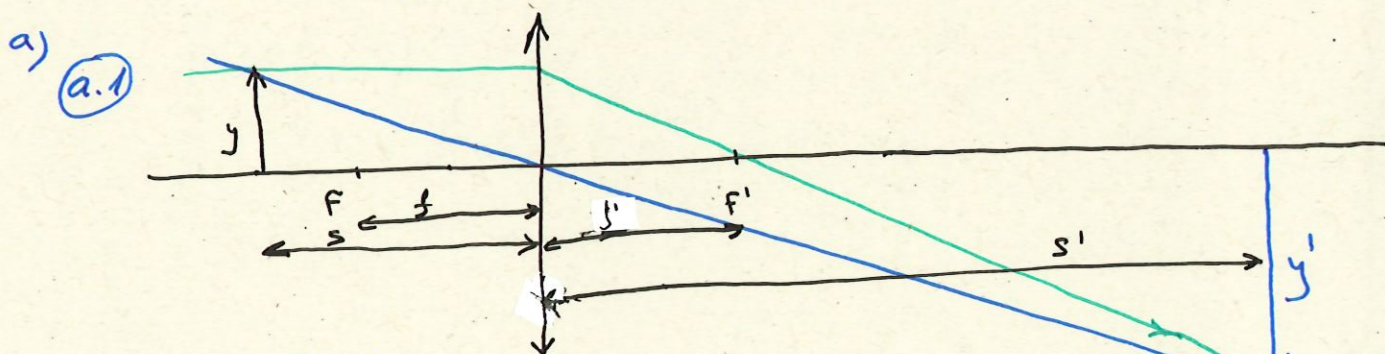
Handipena: $\boxed{y' = \frac{s'}{s} y = \frac{-6}{-3} y = 2y}$ Objektuaren bikoitza da eta zuzen dago.

c) Irudia birtuala da izpien iturri gisa lortzen dalako.

P2.- Lente edo leiar baten distantzia fokala 20 cm da. Lentetik 30 cm-ra 15 cm-ko altuerako objektu bat kokatzen dela jakinik:

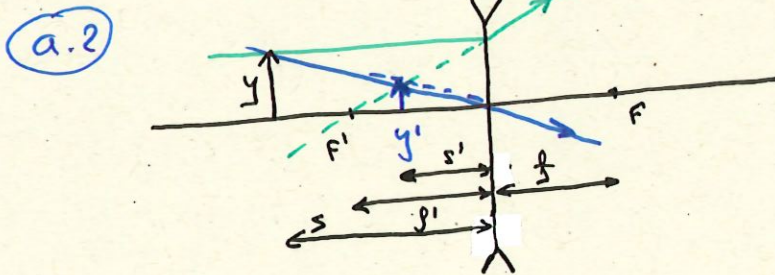
- a) Egin dagokion izpi-diagrama, eta adierazi, kualitatibiko, zer ezaugarri izango duen sortutako irudiak (erreal/birtuala, zuzen/buruz beherakoa, handiagoa/txikiagoa) kasu hauetan:
 - a1. lentea konbergentea da
 - a2. lentea dibergentea da
- b) Kalkulatu a1 atalean lortutako irudiaren tamaina eta posizioa.

Ariketan zehar lente mehuen formulak eta zeinven DIN hitzarmena aplikatuko dira.



Argi ikusten denez:

- IRUDIA** - Erreal da, izpiak osatzen dala.
- Buruz beherakoa da.
 - Objektua baino handiagoa da.



IRUDIA:

- Birtuala (izpien iturria osaturik dagoalako)
- Zuzena da.
- Objektua baino txikiagoa.

b) Posizioa kalkulakete: $\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f}$ \rightarrow $\boxed{s' = \frac{1}{\frac{1}{s} + \frac{1}{f}} = \frac{1}{\frac{1}{-30} + \frac{1}{20}} = 60 \text{ cm}}$

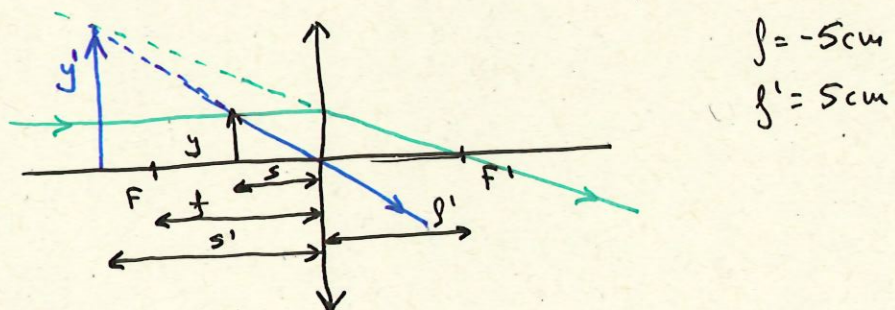
Handipena: $\boxed{y' = \frac{s'}{s} y = \frac{60}{-30} y = -2y}$ \rightarrow $\boxed{y' = -30 \text{ cm}}$

Irudia eskuman agertzen da, 6 cm-ra, buruz beherakoa da eta objektuaren tamaina bikoitza da.

P1.- Zigiluak handiago ikusteko erabiltzen den lente konbergente bat (5 cm-ko foku-distantzia duen lupa) dugu:

- Diagrama batean, adieraz itzazu argi izpien ibilbidea, objektuaren posizioa eta irudiaren posizioa, irudi birtual zuzen eta handitu bat lortu nahi bada.
- Zehaztu ezazu non kokatu behar diren zigiluak baldin eta aurreko atalean definitutako irudia hamar aldiz handiagoa izatea nahi badugu.
- Zehaztu ezazu zer ezaugarri izango dituen lortutako irudiak baldin eta zigilua lentetik 6 cm-ra kokatzen bada (egin itzazu diagrama eta dagozkion kalkuluak).

a) Eskatzen dugu lortzeko objektua egon behar da F eta lente artean.



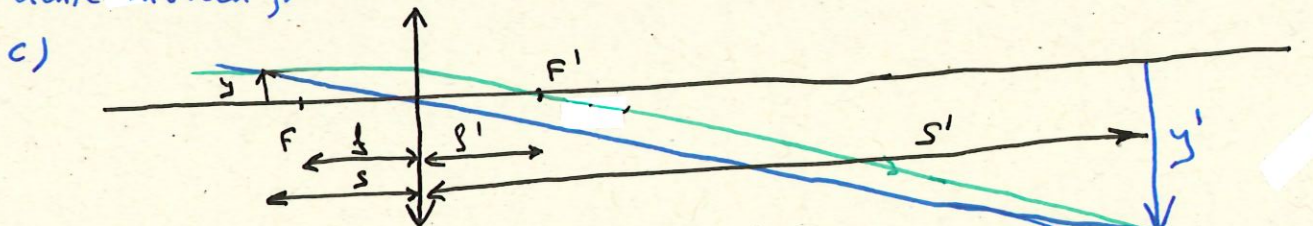
b) Dinoskuenagar: $y' = 10y$

Handipena: $y' = \frac{s'}{s}y \rightarrow 10 = \frac{s'}{s} \rightarrow s' = 10s$

Kokapeneren formula sartuz: $\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} \rightarrow \frac{1}{10s} - \frac{1}{s} = \frac{1}{5}$

$\rightarrow -\frac{9}{10s} = \frac{1}{5} \rightarrow \boxed{s = -4.5 \text{ cm}}$

deute. nekeen formulak eta zeinven DIN hitzarena aplikatu izan dugularik.



Kokapena: $\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} \Rightarrow \boxed{s' = \frac{1}{\frac{1}{s} + \frac{1}{f'}} = \frac{1}{-\frac{1}{6} + \frac{1}{5}} = 30 \text{ cm}}$

Handipena: $\boxed{y' = \frac{s'}{s}y = \frac{30}{-6}y = -5y}$

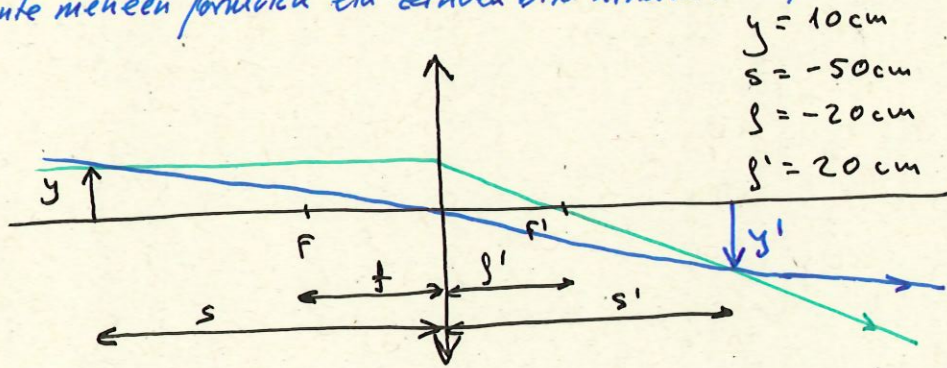
- Irudia:
- Erreal da (izpiak alkatzen dira)
 - Buruz behera dago
 - Objektua baino 5 bider handiagoa da.

P1.- 20 cm-ko foku-distantzia daukan lente konbergente bat dugu. Egin ezazu dagokion diagrama, eta zehaztu itzazu 10 cm-ko objektu batek eraturako irudiaren posizioa, tamaina eta izaera (erreal aedo birtuala, zuzena edo buruz beherakoa, handiagoa edo txikiagoa), kasu hauetan:

- a) objektua lenterik 50 cm-ra dagoenean,
- b) objektu lenterik 15 cm-ra dagoenean.

Ariketa lente meheen formula eta zehazten DIN hitarman aplikatuko dira.

a)

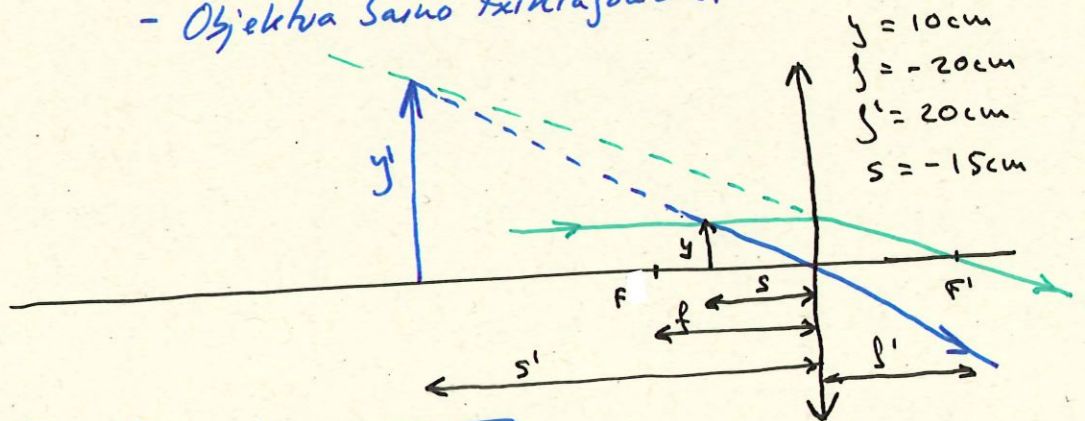


Posizioa kalkulatu behar: $\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f}$ \rightarrow $\boxed{s' = \frac{1}{\frac{1}{s} + \frac{1}{f}} = \frac{1}{\frac{1}{-50} + \frac{1}{20}} = 33.33 \text{ cm}}$

Handipenagat: $\boxed{y' = \frac{s'}{s} y = \frac{33.33}{-50} \cdot 10 = -6.7 \text{ cm}}$

- Berri irudia:
- Erreal (irpikar osatu delako)
 - Buruz beherakoa da.
 - Objektua baino txikiagoa da.

b)



Berri: $\boxed{s' = \frac{1}{\frac{1}{s} + \frac{1}{f}} = \frac{1}{\frac{1}{-15} + \frac{1}{20}} = -60 \text{ cm}}$

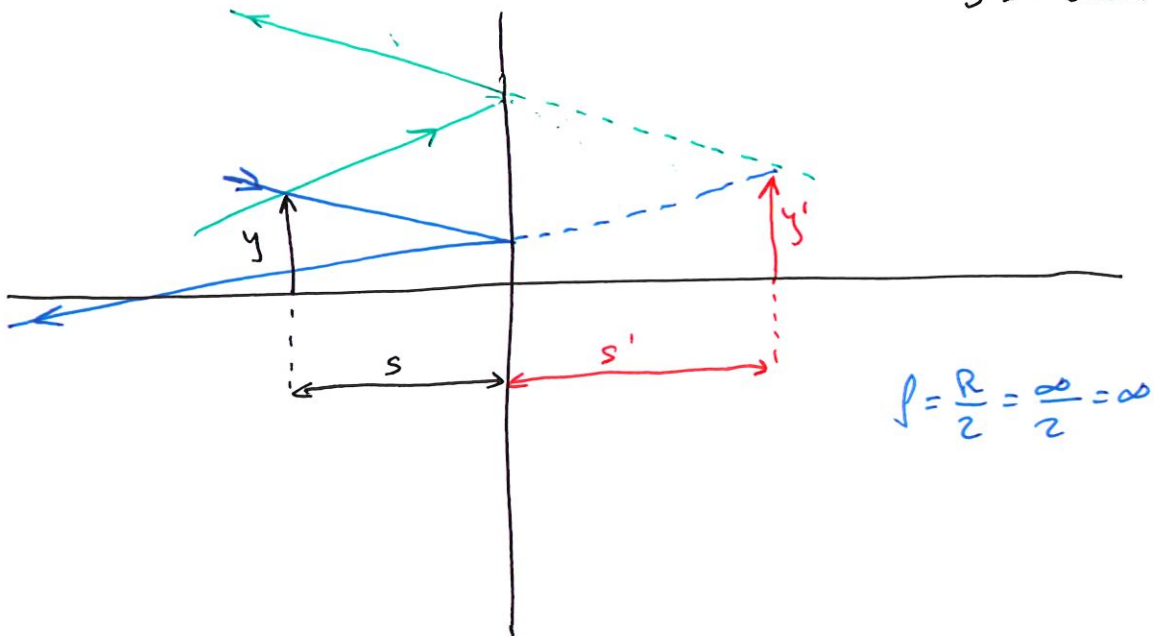
$\boxed{y' = \frac{s'}{s} y = \frac{-60}{-15} y = 4y = 40 \text{ cm}}$

- Irudia:
- Birtuala (irpikar osatu delako)
 - Zuzena da.
 - Objektua baino 4 bide handiagoa.

ISPILU LAUA (Adibide bat)

2.1) Ispilu lau baten aurrean 8cm altuerako objektua ispiutik 20 cm-ra dago. Kalkulatu non ikusiko den irudia eta zein izango den bere altuera.

Datuek : $y = 0'08m$
 $s = -0'2m$



(Ispiluen ekuazioa eta zeinuen hitarmenarekin (DIN) :

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{1}{f} \rightarrow \boxed{s' = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{s}} = \frac{1}{0 - \frac{1}{-0'2}} = 0'2m}$$

Alto-emendua: $A_L = \frac{y'}{y} = \frac{-s'}{s} \Rightarrow \boxed{y' = \frac{-s'}{s} y = \frac{-0'2}{-0'2} \cdot 0'08 = 0'08m}$

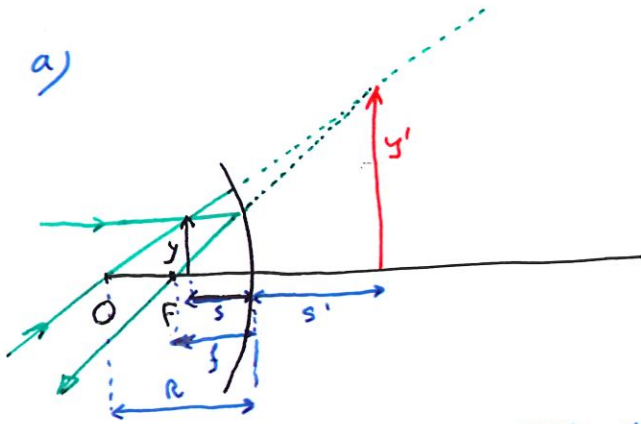
- Irudia: - Birtuala (ispien koapeneu bideetara)
- Ispilitik eskuintzera.
- Zuhik
- Objektuaren tamaina berbera.

ISPILU ESFERIKOAK

3.1) Ispilu esferiko ahur batek 50 cm-ko erradioa du. 5 cm-ko altuera duen objektu bat ispilutik 20 cm-ra jartzen da:

- Izpien ibilbidea marraztu.
- Irudiaren kokapena, tamaina eta izaera kalkulatu.
- Objektuaren irudia ez den egoera bat marraztu.

Erantzuna.: b) $s' = 1,00$ m; $y' = 25$ cm; irudi birtuala, zuzena eta handiagoa.



Kurbadura erradioa: $R = -0,5$ m (ahurra)
 Objektuaren tamaina: $y = 0,05$ m (zutik)
 Objektu-distantzia: $s = -0,2$ m
 Objektu-distantzia fokala: $f = \frac{R}{2} = -0,25$ m

b) Ispiluen ekuazioa erabiliko dugu: $\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{1}{f}$ Zeinuen hitzarmena kontuan hartuz.

Hortik irudi-distantzia bakanduz eta datuak sartuz:

$$s' = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{s}} = \frac{1}{\frac{1}{-0,25} - \frac{1}{-0,2}} = 1 \text{ m}$$

Irudia ispilutik eskuinetara dago eta birtuala da.

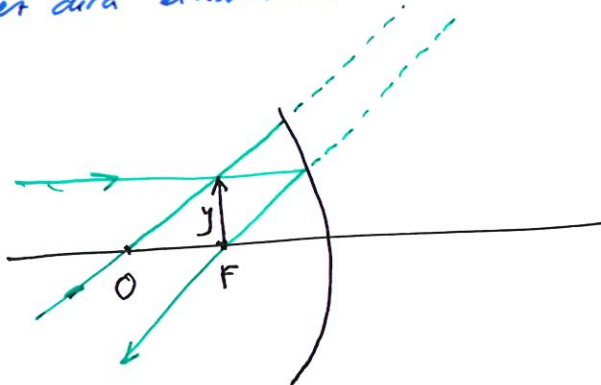
Handipenaren formularekin: $A_L = \frac{y'}{y} = \frac{-s'}{s}$ Irudiaren altuera sakanduz:

$$y' = \frac{-s'}{s} y = \frac{-1}{-0,2} \cdot 0,05 = 0,25 \text{ m}$$

Posizioa: irudia zutik ere.
 Irudia objektua baino bost bider handiagoa da.

Gainera izpien luzapenak elkartzen direnez irudia birtuala da.

c) Irudirik ez lorriko objektua fokuan egon behar da eta holan izpiak ez dira elkartuko.

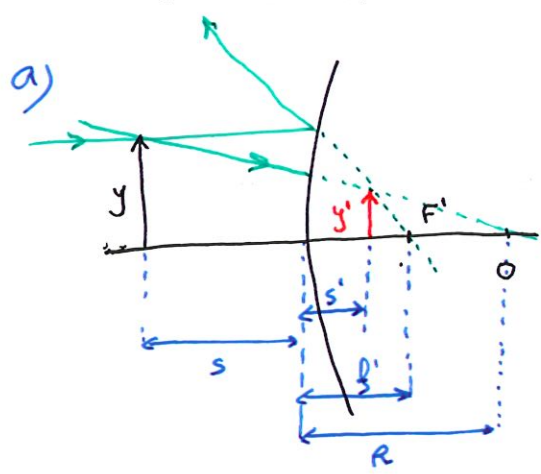


Matematikoki frogatu daitezkena:

$$s' = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{s}} = \frac{1}{\frac{1}{-0,25} - \frac{1}{-0,25}} = \frac{1}{0} = \infty$$

3.2 - 1,5 cm-ko altuera duen objektu bat 20 cm-ko erradioa duen **ispilu esferiko ganbil** baten aurrean kokatuta dago, ispilutik 15 cm-ra. **Irudiaren kokapena, tamaina eta izaera** zehaztu:

- a) Grafikoki.
 - b) Analitikoki.
 - c) **Ispilu ganbil batekin irudi errealek lor daitezke?**
- Erantzuna: b) $s' = +6,0$ cm; $y' = 6,0$ mm



Kurbadura erradioa: $R = 0,2$ m (ganbila)
 Objektu-distantzia fokal: $f = \frac{R}{2} = 0,1$ m
 Objektuaren tamaina: $y = 0,015$ m (zutik)
 Objektu-distantzia: $s = -0,15$ m

b) Ispiluen ekuazioa erabiliz: $\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{1}{f}$, zeinuen hitarmena kontuan hartuz (0,1 m).
 Irudi-distantzia sakanduz eta datuak sartuz:

$$s' = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{s}} = \frac{1}{\frac{1}{0,1} - \frac{1}{-0,15}} = \boxed{0,06 \text{ m}}$$

Ispilutik eskumetara eta birhala, izpien luzapenak elkartzen ditelako.

Irudiaren tamaina eta orientazioa lortzeko albo-emeendua erabiltzen da:

$$A_L = \frac{y'}{y} = \frac{-s'}{s} \rightarrow \boxed{y' = \frac{-s'}{s} y} = \frac{-0,06}{-0,15} \cdot 0,015 = 6 \cdot 10^{-3} \text{ m} = \boxed{6 \text{ mm}}$$

Beste irudia objektua baino txikiagoa da, eta A_L positiboa denet, irudia, objektua bezala, zutik dago.

c) Ispilu ganbiletan F eskumeko partean dago, besterik gabe, positiboa da. Derrigorret s , objektu-distantzia, negatiboa denet, s' -ren ekuazioaren emaitza beti positiboa da.

$$s' = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{s}} = \frac{1}{\frac{1}{|f|} - \frac{1}{-|s|}} = \frac{1}{\frac{1}{|f|} + \frac{1}{|s|}} > 0$$

Eta horrela, logikoki, ispilu ganbiletan irudia beti birhala da, ispilutik eskumetara dago eta izpien luzapenen bidezkoa da.

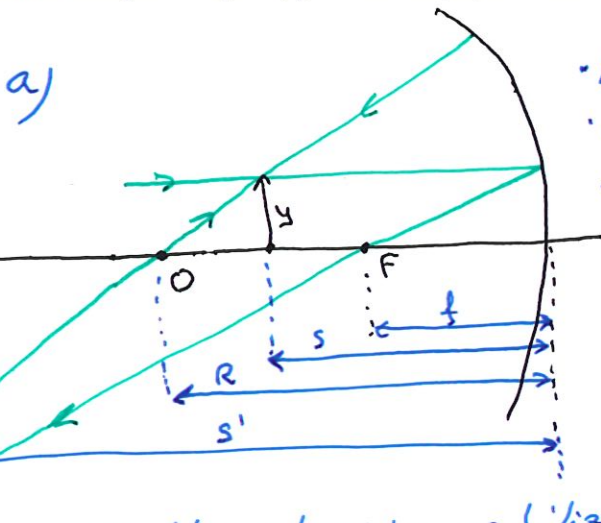
3.3) 5 cm-ko altuera duen objektu bat **ispilu esferiko ahur** baten erpinarekiko x distantziara kokatuta dago; ispiluak 1 m-ko kurbadura-erradioa du. **Irudiaren kokapena eta tamaina** kalkulatu:

a) $x = 75$ cm bada

b) $x = 25$ cm bada

c) Bi kasuetan, **izpien ibilbidea** marraztu.

Erantzuna: a) $s' = -1,5$ m; $y' = -10$ cm; b) $s' = 0,5$ m; $y' = 10$ cm



- Kurbadura erradioa (ahurra): $R = -1$ m
- Objektuaren tamaina (zuhik): $y = 0,05$ m
- Objektu-distantzia fokalari: $f = \frac{R}{2} = -0,5$ m
- Arreko datuak a eta s ataletan erabiltzeriak dira.

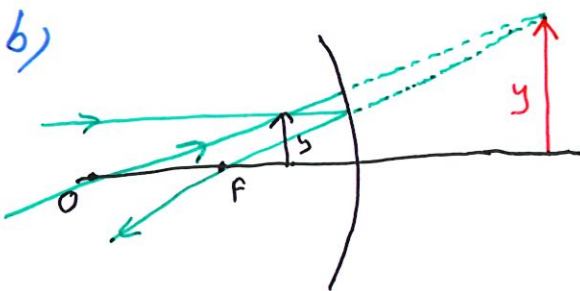
• a atal honetan: objektu-distantzia:
 $s = -0,75$ m

Ispiluen ekuazioa erabiliz, eta zeinuen hitzarmena kontuan hartuz (DIN):

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{1}{f} \Rightarrow \boxed{s' = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{s}} = \frac{1}{-\frac{1}{0,5} - \frac{1}{-0,75}} = -1,5 \text{ m}}$$

Alto-emendia: $A_L = \frac{y'}{y} = \frac{-s'}{s} \rightarrow y' = -\frac{s'}{s} \cdot y = -\frac{-1,5}{-0,75} \cdot y = -2y \rightarrow$
 $\rightarrow \boxed{y' = -2 \cdot 0,05 = -0,1 \text{ m}}$

- Beste irudia:** - Ispilutik **atzerera** 1,5 m-ra dago.
- Objektuaren tamaina **bikoithea** da.
 - **Buruz behera** dago
 - **Erreal** da; izpiak elkarren diralako.



Ararazamendu berdinetan erabiliz.
Kasu honetan $s = 0,25$ m

$$\boxed{s' = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{s}} = \frac{1}{-\frac{1}{0,5} - \frac{1}{-0,25}} = 0,5 \text{ m}}$$

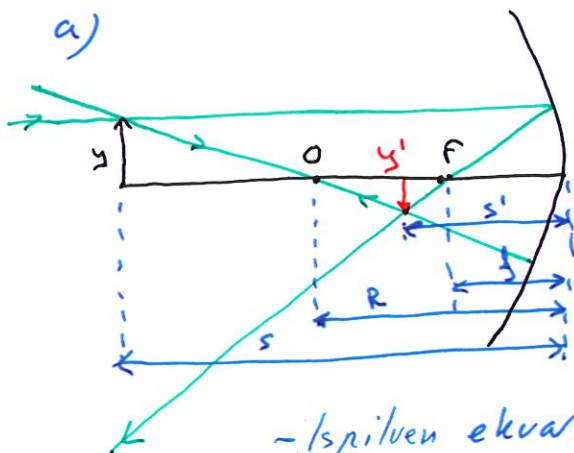
$A_L = \frac{y'}{y} = \frac{-s'}{s} \rightarrow \boxed{y' = \frac{-s'}{s} \cdot y = \frac{-0,5}{-0,25} \cdot y = 2y = 0,1 \text{ m}}$

- Beste irudia:** - Ispilutik **eskuinean** 0,5 m
- Objektuaren tamaina **bikoithea** da.
 - **Zuhik** dago ($y > 0$)
 - **Birtual** da: izpien luzapenak elkarren diralako.

3.4) - Ispilu esferiko ahur batek 0,5 m-ko kurbadura-erradioa du. 5 cm-ko altuera duen objektu baten irudiaren kokapena eta handitze-faktorea zehaztu, analitikoki eta grafikoki, objektua bi posizioetan dagoenean:

- a) Ispilutik 1 m-ra.
b) Ispilutik 0,30 m-ra.

Erantzuna: a) $s' = -0,33$ m; $AL_1 = -0,33$; b) $s' = -1,5$ m; $AL_2 = -5,0$



- Bi ataletarako datuak:
 - Kurbadura erradioa: $R = -0,5$ m (ahurra)
 - Distantzia fokala: $f = \frac{R}{2} = -0,25$ m
 - Objektuaren altuera: $y = 0,05$ m (zutik)
- Atal honetan objektu-distantzia $s = 1$ m

- Ispiluen ekuazioa eta zeinuen hitarmena hartuz (DIN):

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{1}{f} \rightarrow \boxed{s'} = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{s}} = \frac{1}{\frac{1}{-0,25} - \frac{1}{-1}} = \boxed{-0,33 \text{ m}}$$

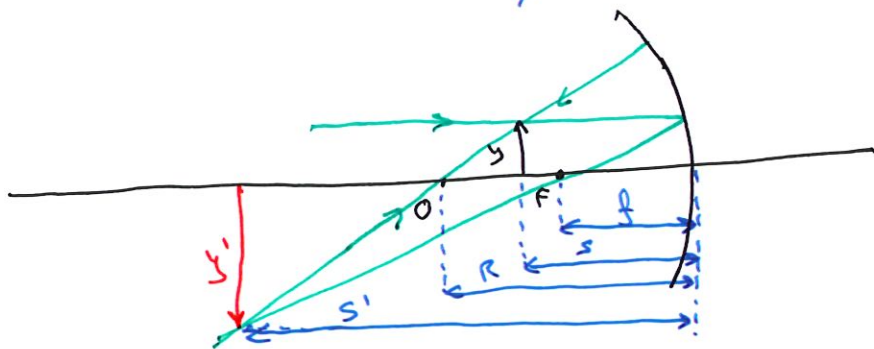
Handitze faktorea: $\boxed{AL_1 = -0,33}$

- Albo-errendua aplikatuz:

$$AL = \frac{y'}{y} = \frac{-s'}{s} \rightarrow \boxed{y'} = \frac{-s'}{s} y = \frac{+0,33}{-1} \cdot 0,05 = \boxed{-0,017 \text{ m}}$$

- Beraz irudia: - Ispilutik etxerera dago eta erreala da, izpik lotzen direlako.
- y' negatiboa denak buruz behera dago eta objektua baino txikiagoa.

b)



Kasu honetan, goriko estrategia berdinarekin eta $s = -0,3$ m izanik.

$$\boxed{s'} = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{s}} = \frac{1}{\frac{1}{-0,25} - \frac{1}{-0,3}} = \boxed{-1,5 \text{ m}}$$

Irudia ispilutik etxerera dago eta erreala da, izpik lotzen direlako.

$$\boxed{y'} = \frac{-s'}{s} y = \frac{+1,5}{-0,3} \cdot 0,05 = \boxed{-0,25 \text{ m}}$$

Buruz behera eta objektua baino bost bider handiagoa da.

Kasu honetan handitze faktorea $\boxed{AL_2 = \frac{y'}{y} = -5}$

3.5) 50 cm-ko erradioa duen ispilu esferiko bat eta 5 cm-ko altuera duen objektu bat emanda, objektua ardatz optikoaren gainean eta ispilutik 30 cm-ra dagoela jakinda, **irudiaren kokapena eta tamaina** kalkulatu, **analitikoki eta grafikoki**:

- a) Ispilua ahurra bada.
- b) Ispilua ganbila bada.

Erantzuna: a) $s'_1 = -1,5$ m; $y'_1 = -0,25$ m; b) $s'_2 = 0,14$ m; $y'_2 = 0,023$ m

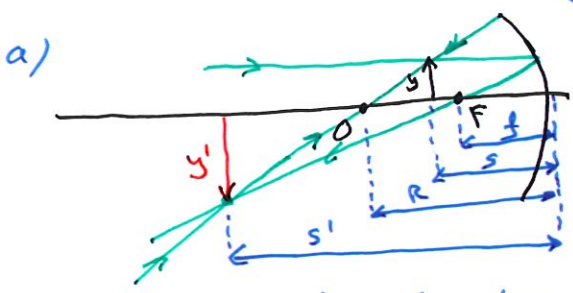
Atal bietarako datuak: - kurbadura erradikoa: $|R| = 0,5$ m
 - Objektuaren tamaina: $y = 0,05$ m eta zutik.
 - Objektu-distantzia: $s = -0,3$ m
 - Objektu-distantzia fokala

$\left. \begin{array}{l} \text{a) } R = -0,5 \text{ m} \\ \text{b) } R = 0,5 \text{ m} \end{array} \right\}$
 $\left. \begin{array}{l} \text{a) } f = \frac{R}{2} = -0,25 \text{ m} \\ \text{b) } f = \frac{R}{2} = 0,25 \text{ m} \end{array} \right\}$

Bi kasuetan Serdin arituko gara:
 1. Ispiluen ekuazioa eta zehinuen hitzamenaren aplikatu (DIN):

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{1}{f} \rightarrow s' = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{s}}$$

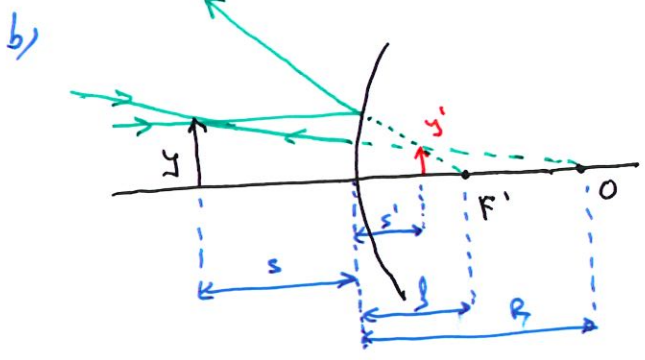
2. Albo-emendua aplikatu:
 $A_L = \frac{y'}{y} = \frac{-s'}{s} \rightarrow y' = \frac{-s'}{s} \cdot y$



$$s' = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{s}} = \frac{1}{\frac{1}{-0,25} - \frac{1}{-0,3}} = -1,5 \text{ m}$$

$$y' = \frac{-s'}{s} y = \frac{1,5}{-0,3} \cdot 0,05 = -0,25 \text{ m}$$

Izpiak elkarrean dira, beraz irudi erreal eta ispilutik atzerre. Irudia buzur behe dago eta objektua baino best bide handiagoa da.



$$s' = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{s}} = \frac{1}{\frac{1}{0,25} - \frac{1}{-0,3}} = 0,14 \text{ m}$$

$$y' = \frac{-s'}{s} y = \frac{-0,14}{-0,3} \cdot 0,05 = 0,023 \text{ m}$$

Izpien luzapenak elkarrean dira, beraz irudi birtala da eta ispilutik eskuinalde dago. Irudia zutik dago ($y' > 0$) eta objektua baino txikiagoa da ($A_L < 1$).

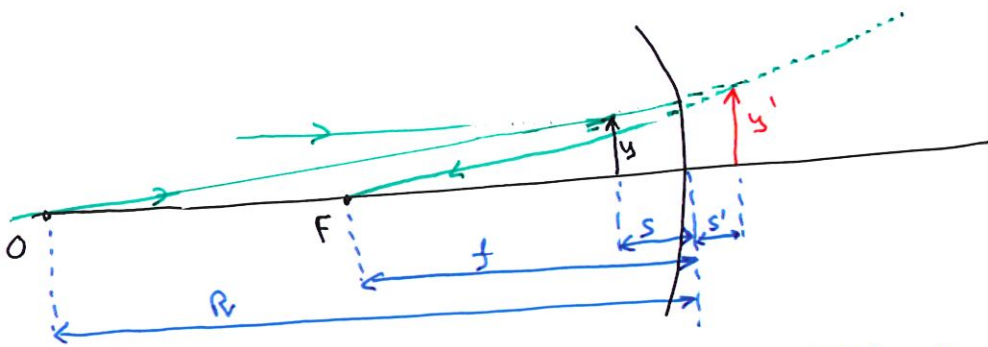
3.6) - 3 cm-ko altuera duen objektu bat **ispilu esferiko ahur** baten aurrean dago, ispilutik 8 cm-ra, eta irudia ispilutik 10 cm-ra eskuinaldean sortzen da:

- a) Foku-distantzia kalkulatu.
 - b) Izpien ibilbidea marraztu eta irudiaren tamaina lortu.
 - c) Zein posiziotan jarri behar da objektua ardatzean irudia ez sortzeko?
- Erantzuna: a) $f = -0,40$ m; b) $y' = 3,8$ cm

Enuntziatuak ematen dituztun datuak:

- Objektuaren tamaina: $y = 0,03$ m
- Objektu-distantzia: $s = -0,08$ m
- Irudi-distantzia: $s' = +0,1$ m
- Kurbadura erradiala eta foku-distantziak negatiboak (ahurra)

- a) Foku-distantzia kalkulatzeko ispiluen ekuazioa eta zeinuaren hitzarmena aplikatzeko ditugu (DIM): $\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{1}{f} \rightarrow \boxed{f = \frac{1}{\frac{1}{s'} + \frac{1}{s}} = \frac{1}{\frac{1}{0,1} + \frac{1}{-0,08}} = -0,4 \text{ m}}$
- b) Distantzia-fokala negatiboa, ispilua ahurra delako. Kurbadura erradiala, O puntua lortzeko, f -ren bikoitza da: $\boxed{R = 2 \cdot f = -0,8 \text{ m}}$. Hala:



Irudiaren tamaina lortzeko aldo-emendua erabiliko dugu:

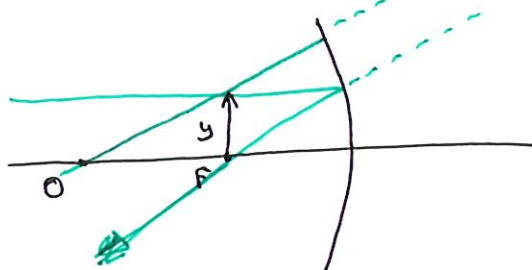
$$A_L = \frac{y'}{y} = \frac{-s'}{s} \rightarrow \boxed{y' = \frac{-s'}{s} \cdot y = \frac{-0,1}{-0,08} \cdot 0,03 = 0,0375 \text{ m}}$$

- Irudia: - Birtala izpien baxapenak erakusten ditelako.
 - Zutik ($y' > 0$) eta objektua baino handiagoa ($A_L > 1$)
 - Ispilutik eskuinaldean (enuntziatuak dituen bezala)

- c) Irudia ez sortzeko irudi-distantzia infinitu izan behar da. Hala:

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{1}{f} \rightarrow s' = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{s}} \Rightarrow \text{Izendatutakoan zero lortzeko } \boxed{s = f}$$

Beaz irudirik ez lortzeko objektua ispilutik f distantziara jarri behar da.



Izpien baxapenak paraleloki iristen dira.

3.7) Ispilu batek 1,5eko handitze lateral du, pertsona baten aurpegia ispilutik 20 cm-ra dagoenean.

a) Arrazoitu ispilu hori laua, ahurra edo ganbila den.

b) Izpien diagrama marraztu.

c) Ispiluaren foku-distantzia kalkulatu.

Erantzuna: c) $f = -60$ cm

a) Zeinuen hitarmena eta albo-eremudien formularekin, jakinda $A_L = 1,5$:

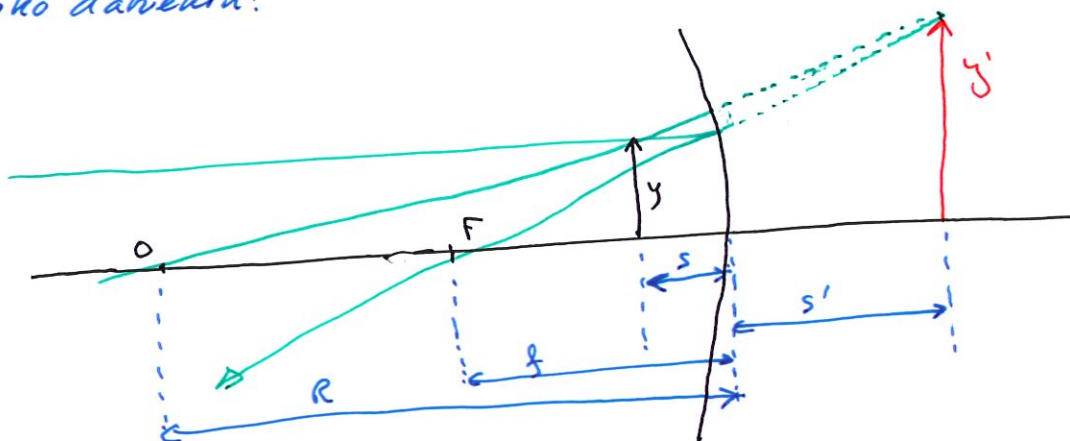
$$A_L = \frac{y'}{y} = \frac{-s'}{s} = 1,5 \rightarrow \boxed{s' = -1,5 \cdot s = -1,5 \cdot (-0,2) = 0,3 \text{ m}}$$

Orain ispiluen ekuazioarekin: $\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{1}{f}$; distantzia-fokala kalkulatu:
Zeinuen hitarmena aplikatuz (0,1 m)

$$\boxed{f = \frac{1}{\frac{1}{s'} + \frac{1}{s}} = \frac{1}{\frac{1}{-0,2} + \frac{1}{0,3}} = -0,6 \text{ m}}$$

Distantzia fokala negatiboa denet ispilua ahurra da, eta bere kurbadura erradikoa: $\boxed{R = 2 \cdot f = -1,2 \text{ m}}$ Minusa zeinuen hitarmenagaratik

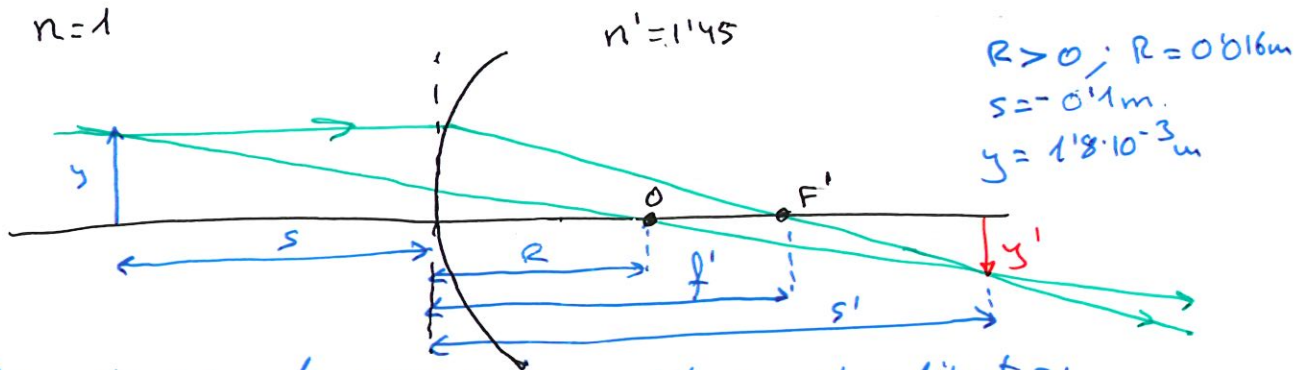
b) Goiko datuekin:



c) $\boxed{f = -0,6 \text{ m}}$ Era justifikatua a atarian kalkulatu egin da.

DIOPTRIO ESFERIKOAK

4.1) Errefrakzio-indizea $n=1,45n$ duen beirazko zilindro bat altzorraren mapa baten gainazalitik 10 cm-ra kokatzen da. Mapako letrak 1,8 mm-ko altuera dute. Zehaztu letren irudiaren kokapena, tamaina eta izaera, kontuan hartuta zilindroaren azpiko aurpegia esferikoa eta ganbila dela eta 1,6 cm-ko erradioa duela.



Dioptrioen ekuazioa eta DIN (zeinuen hitarmena) aplikatu:

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n' - n}{R} \Rightarrow \boxed{s' = \frac{n'}{\frac{n' - n}{R} + \frac{n}{s}} = \frac{1.45}{\frac{1.45 - 1}{0.016} + \frac{1}{-0.1}} = 0.08 \text{ m}}$$

Alto-emendatzailearen formulagat, eta DIN Kontuan hartuz:

$$A_L = \frac{y'}{y} = \frac{n \cdot s'}{n' \cdot s} \rightarrow \boxed{y' = \frac{n \cdot s'}{n' \cdot s} \cdot y = \frac{1 \cdot 0.08 \cdot 1.8 \cdot 10^{-3}}{1.45 \cdot (-0.1)} = -9.93 \cdot 10^{-4} \text{ m}}$$

$$\boxed{A_L = -0.55}$$

- Irudia:
- Erpinetik ekuinardera 0.08 m-ra dago.
 - Irudia objektua baino txikiagoa da.
 - Irudia buruz sera dago.
 - Irudia erreala da (irudiak elkarren diralako)

Gratika egiteko. Jokuen kokapenak kalkulatu ditut:

$$f = \frac{n \cdot R}{n - n'} = \frac{1 \cdot 0.016}{1 - 1.45} = -0.029 \text{ m}$$

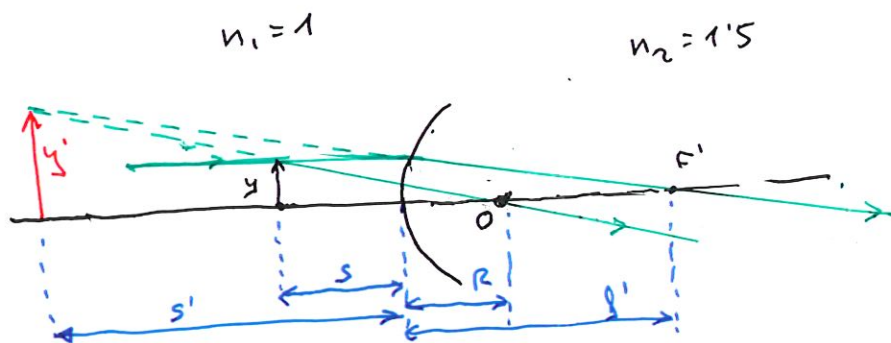
$$f' = \frac{n' \cdot R}{n' - n} = \frac{1.45 \cdot 0.016}{1.45 - 1} = 0.042 \text{ m}$$

(Dena den f' erabili dut sakarrik)

4.2) 2,0 mm-ko altuera duen objektu argitsu bat airea eta beira bereizten dituen dioptrio esferiko ganbil baten erpinarekiko 12 cm-ra kokatuta dago. Airearen errefrakzio-indizea $n_1=1,00$ da eta beirarena $n_2=1,50$. Dioptrioaren kurbadura-erradioa $R=+8$ cm da.

Eskatzen da:

- Irudiaren kokapena kalkulatzeko.
- Irudiaren tamaina zehazteko.
- Irudiaren izaera adierazteko (erreala ala birtuala, zuzena ala alderantzikatua).



Fokuzko distantzia:

$$f' = \frac{n_2 \cdot R}{n_2 - n_1} = \frac{1.5 \cdot 0.08}{1.5 - 1} = 0.24 \text{ m}$$

$$R = 0.08 \text{ m} \quad (R > 0, \text{ ganbila})$$

$$s = -0.12 \text{ m} \quad (\text{objektu distantzia})$$

$$y = 0.002 \text{ m} \quad (\text{objektuaren altuera})$$

a) Dioptrioaren ekuazioa eta zehizkoaren OIN hitzarmena erabiliz:

$$\frac{n_1}{s'} - \frac{n_2}{s} = \frac{n_2 - n_1}{R} \rightarrow \boxed{s' = \frac{n_1}{\frac{n_2 - n_1}{R} + \frac{n_2}{s}} = \frac{1}{\frac{1.5 - 1}{0.08} + \frac{1}{-0.12}} = -0.72 \text{ m}}$$

Irudia ispatatik ekerraldera sartzen da, erpinetik 0.72 m-ra.

b) Albo-emendua eta OIN zehizkoaren hitzarmenarekin:

$$A_L = \frac{y'}{y} = \frac{n_1 \cdot s'}{n_2 \cdot s} \rightarrow \boxed{y' = \frac{n_1 \cdot s'}{n_2 \cdot s} \cdot y = \frac{1 \cdot (-0.72)}{1.5 \cdot (-0.12)} \cdot 0.002 = 8 \cdot 10^{-3} \text{ m}}$$

Irudiaren tamaina objektuaren tamainaren laukoitza da.

$$\boxed{A_L = 4}$$

c) Irudia, ikusten dena, erpinetik urarenekin lotzen da, berriz birtuala da.

Bere tamaina ikusita, $y' > 0$, zuzena dela ikusten da ere.

- 4.3) $y=3,0$ mm-ko altuera duen objektu bat airean kokatuta dago, $s=-18$ cm -ra, airea ($n_1=1,00$) eta beira ($n_2=1,50$) bereizten dituen dioptrio esferiko ahur baten erpinarekiko. Dioptrioaren kurbadura-erradioa $R=-12$ cm da (objektutik begiratuta ahurra).

Eskatzen da:

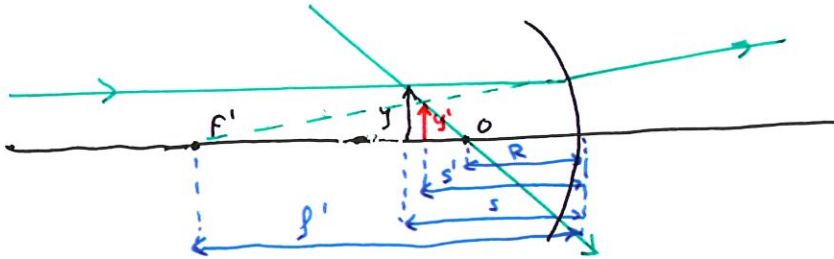
- Irudiaren kokapena s' kalkulatzeko.
- Handipena eta irudiaren tamaina y' zehazteko.
- Irudiaren izaera adierazteko (erreala ala birtuala, zuzena ala alderantzikatua).

$$n = 1$$

$$n' = 1.5$$

objektuaren altuera: $y = 0.003$ m
 objektu-distantzia: $s = -0.18$ m
 kurbadura erradioa (ahurra) = $R = -0.12$ m

$$f' = \frac{n'R}{n'-n} = \frac{1.5 \cdot (-0.12)}{1.5-1} = -0.36 \text{ m}$$



- a) Dioptrioen ekuazioa eta DIN hitarmena aplikatuz:

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n'-n}{R} \rightarrow \boxed{s' = \frac{n'}{\frac{n'-n}{R} + \frac{n}{s}} = \frac{1.5}{\frac{1.5-1}{-0.12} + \frac{1}{-0.18}} = -0.154 \text{ m}}$$

Irudia ispi-lurrik erretsean 0.154 m-ra dago.

- b) Albo-emendioa eta zehazten dituen DIN hitarmena aplikatuz:

$$A_L = \frac{y'}{y} = \frac{n \cdot s'}{n' \cdot s} \rightarrow \boxed{y' = \frac{n \cdot s'}{n' \cdot s} \cdot y = \frac{1 \cdot (-0.154)}{1.5 \cdot (-0.18)} \cdot 0.003 = 1.71 \cdot 10^{-3} \text{ m}}$$

Irudia objektuaren baino txikiagoa da.

$$\boxed{A_L = 0.57}$$

- c) Irudiaren izaera adierazteko erreal irudi birtuala da.

$y' > 0 \rightarrow$ irudia zuzena da.

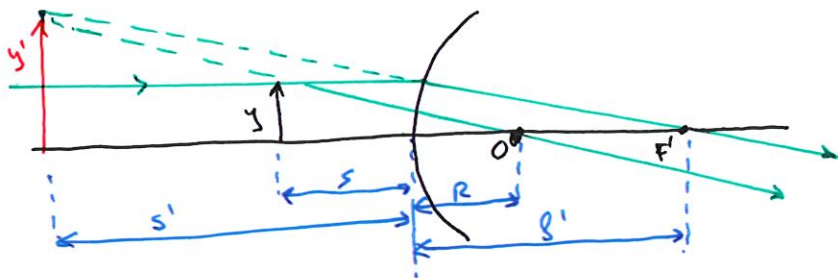
4.4) 2,0 mm-ko altuera duen objektu argitsu bat airean dago ($n_1 = 1,00$), eta 12 cm-ko distantziara kokatzen da airea eta beira bereizten dituen gainazal esferiko ganbil baten aurrean ($n_2 = 1,50$).

Gainazalaren kurbadura-erradioa $R = +8,0$ cm da (kurba-zentroa beiraren aldean dago).

1. Kalkulatu irudiaren kokapena (s').
2. Adierazi irudia erreala ala birtuala den.
3. Kalkulatu handitze lateral eta irudiaren altuera (y')

$$n_1 = 1$$

$$n_2 = 1.5$$



Objektuaren altuera: $y = 0.002$ m
 Objektu-distantzia: $s = -0.12$ m
 Kurbadura erradioa, ganbil: $R = 0.08$ m

$$f' = \frac{n'R}{n'-n} = \frac{1.5 \cdot 0.08}{1.5-1} = 0.24 \text{ m}$$

- 1) Dioptrioen ekuazioa eta DIN zeinuen hitarmena aplikatuz:

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n'-n}{R} \rightarrow \boxed{s' = \frac{n'}{\frac{n'-n}{R} + \frac{n}{s}}} = \frac{1.5}{\frac{1.5-1}{0.08} + \frac{1}{-0.12}} = \underline{\underline{-0.72 \text{ m}}}$$

Irudia dioptriotik orkerraldean 0.72 m-ra dago.

- 2) Grafikau ikusten denar irudia izpien berapenean bitartean sortzen da, beraz irudia birtuala da.

- 3) Atal honetan handitze lateralaren formula eta zeinuen DIN hitarmena aplikatuko ditugu:

$$A_L = \frac{y'}{y} = \frac{n \cdot s'}{n' \cdot s} \rightarrow \boxed{y' = \frac{n \cdot s'}{n' \cdot s} y} = \frac{1 \cdot (-0.72)}{1.5 \cdot (-0.12)} \cdot 0.002 = \underline{\underline{8 \cdot 10^{-3} \text{ m}}}$$

Irudia zuzena da ($y' > 0$) eta objektua baino lau bider handiagoa.

$$\boxed{A_L = 4}$$